LES TACHES SOLAIRES ONT-ELLES DE L'IMPORTANCE ? (*)

par

David CASS et Karl SHELL

Université de Pennsylvanie

L'incertitude extrinsèque («animal spirits», «psychologie du marché», «tâches solaires»,...) peut-elle jouer un rôle significatif dans les modèles d'équilibre avec anticipations rationnelles ? Nous montrons que l'incertitude extrinsèque ne peut pas avoir d'importance dans l'économie Arrow-Debreu statique et pourvue d'un ensemble de marchés complet. Nous montrons également que l'incertitude extrinséque peut avoir de l'importance dans une économie caractérisée par la succession des générations et par l'existence d'un ensemble complet de marchés, mais où l'accès au marché est restreint aux consommateurs qui se trouvent en vie lors de l'ouverture des marchés. Les allocations d'équilibre qui ne sont pas influencées par l'incertitude extrinsèque sont optimales au sens de Pareto traditionnel. Les allocations d'équilibre sur lesquelles l'incertitude extrinsèque a une incidence effective sont optimales en un sens de Pareto (affaibli) adapté à l'analyse dynamique.

1. INTRODUCTION

Quelle est la stratégie à adopter pour jouer à la Bourse ? Vaut-il mieux s'attacher aux «principes fondamentaux» ou se centrer plutôt sur

(*) Cette recherche a bénéficié d'une aide sous la forme d'une subvention attribuée au Center for Analytic Research in Economics and the Social Sciences de l'Université de Pennsylvanie sous le n° SES 80-07012 par la National Science Foundation que nous remercions vivement ici. Nous tenons également à témoigner notre reconnaissance aux membres du séminaire d'économétrie du CNRS, et en particulier à Jean-Michel Grandmont dont les critiques nous ont été très utiles. Nous remercions aussi Catherine Rouzaud pour la traduction française.

la «psychologie du marché» ? Ceux qui espèrent s'enrichir à Wall Street s'intéressent à de telles questions. Mais elles présentent également de l'intérêt pour les macro-économistes.

Selon Keynes et de nombreux Keynésiens, la volatilité de l'investissement reflète en partie du moins celle qui caractérise la «psychologie du marché» ou les «animal spirits» des capitalistes ou, plus généralement, l'«incertitude extrinsèque». L'arbitraire ainsi présumé de l'allocation intertemporelle des ressources dans le cadre d'un capitalisme de laisser-faire justifie de manière importante les bienfaits que Keynes attribue à des politiques fiscales et monétaires actives. Pour les tenants d'autre part des anticipations rationnelles en macro-économie, les «principes fondamentaux» jouent un rôle déterminant dans l'affectation des ressources. Ils soutiennent par conséquent que si l'environnement est stable (si le gouvernement en particulier ne se comporte pas de manière lunatique), alors l'investissement privé le sera également.

Nous nous demandons dans cet article si l'incertitude extrinsèque peut ou non exercer une influence sur les équilibres avec anticipations rationnelles. En d'autres termes : Les prophéties qui se réalisent d'elles mêmes sont-elles susceptibles d'avoir un impact réel ? Ou, en bref : Les «taches solaires» ont-elles une importance(1,2) ?

Nous considérons une économie d'échange pur caractérisée par un horizon temporel fini et un nombre fini de marchandises et de consommateurs. L'incertitude est exclusivement extrinsèque (c'est pourquoi nous la baptisons simplement «taches solaires»). Les consommateurs ont des

---

(1) Tout au long de cet essai, notre usage de l'expression «taches solaires» est destiné à exprimer l'incertitude extrinsèque, c'est-à-dire des phénomènes aléatoires qui n'affectent ni les goûts, ni les dotations, ni les possibilités de production. Bien entendu, ainsi que Jevons l'a remarqué, l'apparition de taches solaires dans le monde réel peut fort bien introduire une incertitude *intrinsèque* à l'économie, influençant, par exemple, les possibilités de production agricoles. Mais nous ne nous interessons ici qu'à notre version plus stylisée de l'activité solaire.

(2) Nous nous sommes penchés sur la question des «taches solaires» pendant un certain temps. Shell (1977) fournit un exemple d'une économie théorique dans laquelle les taches solaires ont de l'importance. Notre collègue Costas Azariadis (à paraitre) a présenté des résultats analogues à l'intérieur d'un cadre macroéconomique plus familier. Ces exemples sont, cependant, fondés sur des modèles dynamiques tres complèxes qui ne nous permettent pas de dissocier les rôles que jouent respectivement la succession des générations, l'horizon temporel infini, et la dette publique. Dans le présent article, nous nous centrons sur les conséquences de la succession des générations dans le cadre d'un modèle d'équilibre très simple. Dans un article apparenté, Yves Balasko (1981) étudie une formulation plus générale de la notion d'incertitude extrinsèque.

Pour un survol de la question des équilibres avec anticipations rationnelles sur lesquels l'incertitude extrinsèque exerce une influence, voir notre article de propagande, Cass et Shell (1980).

fonctions d'utilité de type von Neumann-Morgenstern (3) ainsi que certaines dotations initiales. Nous adoptons l'hypothèse des anticipations rationnelles sous une forme très forte : les croyances relative à l'activité solaire sont les mêmes pour tous les consommateurs. Ceci permet d'interpréter les probabilités subjectives comme des probabilités objectives.

Dans la section II nous montrons que les taches solaires n'ont jamais d'importance à l'intérieur de l'économie Arrow-Debreu la plus simple – une économie dans laquelle chaque consommateur a accès à un ensemble complet de marchés des titres contingents. L'hypothèse d'une participation illimitée contredit cependant tout à la fois le caractère dynamique de l'incertitude et la structure par générations de l'ensemble des ménages. On ne saurait imaginer par quel moyen un consommateur peut se prémunir contre l'activité solaire qui s'est manifestée avant sa naissance.

Dans la section III, nous examinons le cas où les générations se succèdent ce qui limite en conséquence la participation au marché. Nous montrons qu'il existe toujours un équilibre sur lequel les tâches solaires n'exercent pas d'influence. Mais nous montrons également qu'il peut y avoir des équilibres où les taches solaires ont une importance effective. La raison pour laquelle elles n'en ont jamais dans le cadre du modèle Arrow-Debreu réside dans le fait qu'il représente une économie essentiellement a-temporelle.

La généralisation des résultats des sections II et III se trouve dans les appendices.

La section IV est consacrée à l'analyse du bien-être. Les allocations d'équilibre qui ne sont pas influencées par les taches solaires sont optimales au sens de Pareto traditionnel. Celles qui subissent l'influence des taches solaires ne sont pas optimales en ce sens, elles le sont cependant dans un sens naturel, un sens de Pareto affaibli, et où l'on identifie un consommateur par l'état correspondant à sa naissance (aussi bien que par les autres paramètres habituels – essentiellement ses préférences et ses dotations).

Le résultats de cette analyse est que la présence, dans un monde d'équilibre général avec anticipations rationnelles, d'une incertitude extrinsèque – taches solaires, psychologie du marché, «animal spirits», etc. – peut fort bien avoir des effets réels. La leçon à en tirer pour la macroéconomie est que, fut-ce dans l'hypothèse des conditions les plus favorables

(3) Bien qu'elle ne soit pas la plus générale, l'hypothèse de l'utilité espérée convient parfaitement dans ce contexte parce que (i) elle admet une spécification particulièrement bien adaptée à l'incertitude extrinsèque et (ii) elle s'accompagne de l'exigence naturelle de cohérence intertemporelle. Ainsi, les taches solaires influencent les opinions mais non les goûts (sous-jacents et certains), tandis que les consommateurs qui ont des anticipations rationnelles ne souhaiteront jamais modifier leurs plans antérieurs.

en matière d'information et d'institutions, le gouvernement peut conserver la tâche de stabiliser des fluctuations dues à des perturbations de nature apparemment non-économiques.

2. LES TACHES SOLAIRES N'ONT JAMAIS D'INCIDENCE DANS L'ECONOMIE ARROW-DEBREU LA PLUS SIMPLE

Dans cette section comme dans les suivantes, nous prenons pour base un modèle (2 x 2 x 2 x 2) qui est le plus simple possible compte tenu de nos objectifs. Nos principaux résultats se généralisent aisément ; c'est ce que nous démontrons dans les appendices.

Nous supposons ici qu'il y a (i) deux périodes $t = 0, 1$ «aujourd'hui», soit le moment où les contrats sont négociés, et «demain» (celui où ils sont réalisés), (ii) deux biens $i = 1, 2$ (sauf pour la représentation graphique), (iii) deux états futurs possibles $s = \alpha, \beta$ (présence de taches solaires demain et absence de taches solaires demain) et (iv) deux consommateurs $h = 0, 1$ («M^r 0» et «M^r 1»). Soit $x_h^i(s)$ la quantité du bien i consommée par l'agent h dans l'état s, et $x_h(s)$ le vecteur $(x_h^1(s), x_h^2(s))$. Les préférences du consommateur h portent donc sur sa consommation prospective et sont représentées par une fonction d'utilité $v_h : \mathbf{R}_+^4 \to \mathbf{R}$. La fonction v_h est supposée continue, croissante et strictement quasi-concave. La production n'intervient pas dans cette économie, seulement la répartition. On suppose que les dotations de biens prospectifs du consommateur $h(\omega_h(\alpha), \omega_h(\beta)) = ((\omega_h^1(\alpha), \omega_h^2(\alpha)), (\omega_h^1(\beta), \omega_h^2(\beta))$, sont strictement positives.

Notre modèle spécifique se particularise par la structure très spéciale que l'incertitude y revêt – et qui justifie notre choix du terme suggestif de «taches solaires». De manière générale, nous supposons que l'activité solaire n'affecte pas les «éléments fondamentaux» (la configuration de base des préférences et des dotations), mais seulement la «psychologie» du marché (la perception par les consommateurs du mode de détermination du prix de marché). Ce postulat se précise sous la forme suivante : les consommateurs croient (à raison, si l'on veut) que des taches solaires se manifesteront avec la probabilité $0 < \pi(\alpha) < 1$, et donc qu'elles ne se produiront pas avec la probabilité $\pi(\beta) = 1 - \pi(\alpha)$. L'activité solaire cependant, transcrite en termes de leurs préférences, ne représente pour les consommateurs que la base d'une loterie potentielle. Ils évaluent, par conséquent, de manière rationnelle leur consommation prospective conformément à l'hypothèse de l'utilité espérée, soit

$$v_h(x_h(\alpha), x_h(\beta)) = \pi(\alpha)\, u_h(x_h(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_h(x_h(\beta)) \qquad (1)$$

pour $h = 0, 1$. La fonction d'utilité pour une consommation certaine $u_h : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ est donc continue, croissante et strictement concave. Ceci

signifie en particulier que l'évaluation par les consommateurs des résultats de la loterie basée sur l'activité solaire traduit de leur part une stricte aversion pour le risque ([4]). Qui plus est, les dotations sont également indépendantes de l'activité solaire, i.e. :

$$\omega_h(\alpha) = \omega_h(\beta) = \omega_h \tag{2}$$

pour $h = 0, 1$.

Comment l'activité solaire peut-elle donc avoir un quelconque effet réel sur l'allocation réalisée par le marché ? Elle le peut, simplement parce que les consommateurs croient (à juste titre) qu'elle en aura un, que les prix futurs des marchandises (et, par conséquent, les échanges futurs de biens) dépendront de la présence ou de l'absence de taches solaires. En termes formels, les consommateurs sont effectivement ([5]) confrontés à un système complet de marchés de biens contingents, mais tel que l'activité solaire elle-même soit le seul élément contingent.

Le fonctionnement de ces marchés correspond à la description Walrasienne habituelle. Soit $p^i(s)$ le prix du bien i dans l'état s, et $p(s)$ le vecteur $(p^1(s), p^2(s))$. Un équilibre (de marché, concurrentiel) est ainsi une paire de quantités allouées et de prix de biens contingents

$$(p, x) = ((p(\alpha), p(\beta)), (x_0(\alpha), x_0(\beta), x_1(\alpha), x_1(\beta)))$$

telle que

(i) *Les consommateurs optimisent,* i.e., $(x_h(\alpha), x_h(\beta))$ est la solution du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire

Maximisation de $\quad \pi(\alpha)\, u_h(x_h(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_h(x_h(\beta))$

sous les contraintes

$$p(\alpha)\, x_h(\alpha) + p(\beta)\, x_h(\beta) \leqq p(\alpha)\, \omega_h + p(\beta)\, \omega_h \tag{3}$$

et

$$(x_h(\alpha), x_h(\beta)) \geqq 0$$

pour $h = 0, 1$

et (ii) *les marchés sont en équilibre,* i.e.,

$$x_0(s) + x_1(s) = \omega_0 + \omega_1 \tag{4}$$

pour $s = \alpha, \beta$.

---

(4) Les hypothèses de monotonicité et de stricte aversion pour le risque (qui implique la monotonicité stricte) simplifient beaucoup l'examen présenté dans le texte. Cependant, comme nous le montrons dans le premier appendice, seule l'hypothèse d'aversion pour le risque joue un rôle important au cours de l'analyse.

(5) Cette précision exprime notre souci d'interpréter le modèle d'Arrow-Debreu de manière véritablement dynamique. On doit également concevoir les prix des biens contingents établis aujourd'hui (réalisés) comme la prévision, conforme à l'hypothèse des anticipations rationnelles, des prix des biens au comptant de demain. Ce point de vue de base est développé de manière plus complète dans la section suivante.

Les propriétés générales (existence, optimalité Paretienne, etc.) d'un tel équilibre sont bien connues ; notre modèle spécifique n'est après tout qu'un cas particulier du modèle Arrow-Debreu habituel. Ce qui reste à examiner est la question propre à la structure particulière de l'incertitude que nous supposons : les taches solaires peuvent-elles effectivement influencer l'allocation d'équilibre ? ou, plus généralement, un phénomène apparemment extérieur peut-il effectivement modifier le résultat du processus de marché simplement parce que l'on croit de manière cohérente qu'il le peut ?

Pour répondre à cette question, nous avons besoin de décrire de manière précise le cas où les taches solaires ont (resp. n'ont pas) une incidence réelle. Il nous suffit de dire pour le moment que, étant donné un équilibre particulier (p, x), *les taches solaires ont une importance* (resp. *n'en ont pas*) si $x_h(\alpha) \neq x_h(\beta)$ (resp. $x_h(\alpha) = x_h(\beta)$ pour $h = 0,1$ (6). La propriété fondamentale de l'économie Arrow-Debreu est qu'il n'y a jamais d'équilibre sur lequel les taches solaires ont une incidence (et, *à fortiori*, il y a toujours un équilibre sur lequel elles n'en ont pas). Autrement dit, en admettant l'hypothèse des anticipations rationnelles, le bien-être des consommateurs serait exactement le même si les marchés de biens contingents d'ajourd'hui étaient réduits, ou remplacés par les marchés de biens au comptant de demain. Ce qui suit démontre ce résultat, immédiat mais fondamental.

Proposition 1

Dans l'économie de type Arrow-Debreu, il n'existe aucun équilibre sur lesquel les taches solaires aient une influence.

Démonstration (dans le cas de notre modèle spécifique)

Supposons qu'il en soit autrement, i.e., supposons qu'il existe une équilibre (p, x) influencé par les tâches solaires. Alors $x_h(\alpha) \neq x_h(\beta)$ pour $h = 0, 1$. Considérons maintenant l'allocation certaine suivante :

$$\bar{x}_h(s) = \bar{x}_h = \pi(\alpha)\, x_h(\alpha) + \pi(\beta)\, x_h(\beta)$$

pour $h = 0, 1$; $s = \alpha, \beta$. D'une part, en vertu de (4) cette allocation alternative est réalisable puisque :

$$\begin{aligned}\bar{x}_0(s) + \bar{x}_1(s) &= (\pi(\alpha)\, x_0(\alpha) + \pi(\beta)\, x_0(\beta)) + (\pi(\alpha)\, x_1(\alpha) + \pi(\beta)\, x_1(\beta)) \\ &= \pi(\alpha)\,(x_0(\alpha) + x_1(\alpha)) + \pi(\beta)\,(x_0(\beta) + x_1(\beta)) \qquad (5)\end{aligned}$$

(6) Cette simple définition (en termes de consommation) est suffisante sous l'hypothèse de stricte aversion pour le risque. Une définition générale plus adaptée (en termes de bien-être) est fournie dans le premier appendice.

$$= \pi(\alpha)\,(\omega_0 + \omega_1) + \pi(\beta)\,(\omega_0 + \omega_1) \tag{5}$$
$$= \omega_0 + \omega_1$$

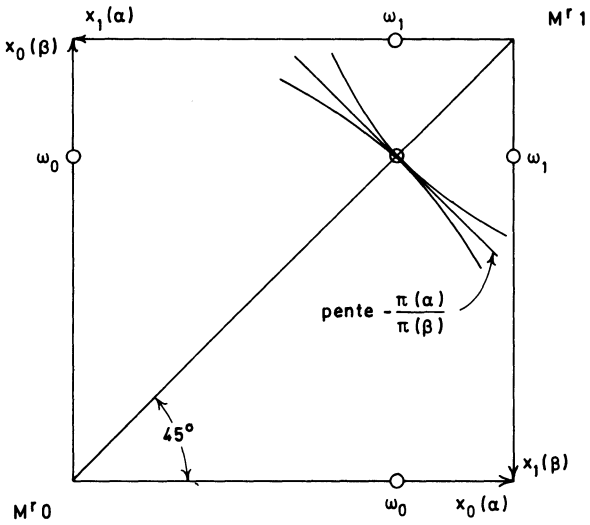
pour $s = \alpha, \beta$. D'autre part, en vertu de (1) et de la concavité stricte de u_h, cette allocation alternative est également dominante puisque :

$$\begin{aligned} v_h(\bar{x}_h, \bar{x}_h) &= \pi(\alpha)\, u_h(\bar{x}_h) + \pi(\beta)\, u_h(\bar{x}_h) \\ &= u_h(\bar{x}_h) \\ &= u_h(\pi(\alpha)\, x_h(\alpha) + \pi(\beta)\, x_h(\beta)) \\ &> \pi(\alpha)\, u_h(x_h(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_h(x_h(\beta)) \\ &= v_h(x_h(\alpha), x_h(\beta)) \end{aligned} \tag{6}$$

pour $h = 0, 1$. Mais les équations (5) et (6) contredisent le résultat bien connu selon lequel une allocation d'équilibre doit être optimale au sens de Pareto. □

Une lecture attentive de la Proposition 1 et de sa démonstration révèle qu'elle constitue une adaptation directe – à nos fins particulières – d'un important théorème énoncé par Malinvaud (1972).

La figure 1 illustre cette proposition de base dans le cas d'une seule marchandise. Cet exemple met en relief le fait que la Proposition 1 repose

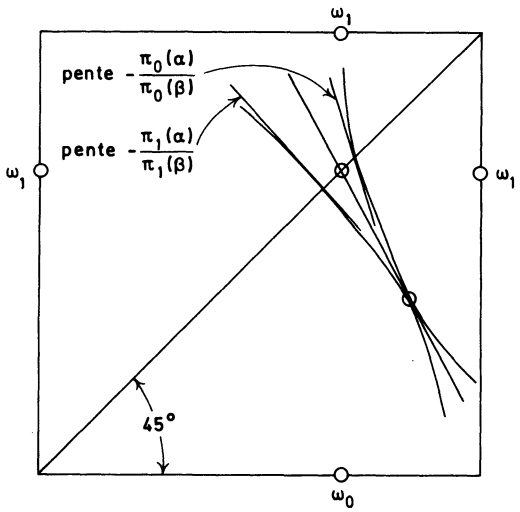


$\pi_h(\alpha) = \pi(\alpha)$ et $\omega_h(\alpha) = \omega_h(\beta) = \omega_h$ pour $h = 1, 2$

Figure 1.

sur une idée simple : l'idée selon laquelle des individus rationnels ayant une aversion pour le risque et partageant les mêmes croyances ne prendront pas des partis opposés dans un pari, même s'il s'agit d'un pari équitable. Les allocations situées sur la diagonale du carré correspondent à la tangence des courbes d'indifférence. Sous l'hypothèse de stricte concavité, toute allocation non située sur la diagonale est donc inférieure au sens de Pareto à une allocation située sur la diagonale. En conséquence, puisque les dotations se trouvent sur la diagonale, il n'y a pas d'échanges mutuellement acceptables : les taches solaires ne peuvent exercer une influence.

La Proposition 1 dépend de manière cruciale de l'hypothèse selon laquelle les consommateurs ont les mêmes opinions en ce qui concerne les probabilités des taches solaires. Différentes opinions créent une forte incitation à échanger des biens contingents. Sur la figure 2, les dotations se situent à nouveau sur la diagonale du carré. Sur cette diagonale, la pente de la courbe d'indifférence de $M^r h$ est donnée par le rapport de ses probabilités subjectives, $(\pi_h(\alpha)/\pi_h(\beta))$. Par conséquent, si les probabilités de $M^r 0$ et $M^r 1$ sont différentes, i.e., $(\pi_0(\alpha)/\pi_0(\beta)) \neq (\pi_1(\alpha)/\pi_1(\beta))$, alors chaque allocation située sur la diagonale est dominée au sens de Pareto. Toutes les allocations d'équilibre doivent donc se trouver hors de la diagonale : lorsque les croyances individuelles sont divergentes, l'incertitude extrinsèque doit avoir une importance. Dans ce qui suit, nous nous limitons au cas moins prévisible où les mêmes croyances sont partagées par tous –



$\pi_0(\alpha) \neq \pi_1(\alpha)$

Figure 2.

soit une version très forte de l'hypothèse des anticipations rationnelles. On ne doit pas, cependant, négliger les conséquences, importantes en pratique, du fait que les prévisions d'individus rationnels peuvent différer en raison d'une différence d'information. L'une de ces conséquences est que l'incertitude extrinsèque a toutes les chances d'exercer une influence.

Bien entendu, l'incertitude importe également si elle affecte les préférences ou les dotations individuelles. Sur la figure 3, les dotations de $M^r 0$ varient *ceteris paribus* selon l'état de la nature. Comme les préférences agrégées varient de même selon cet état, la boite de la Figure 3 n'est pas en général un carré. Le bien-être individuel peut être amélioré si $M^r 0$ et $M^r 1$ partagent le risque. L'équilibre ne se trouve pas au point d'autarcie.

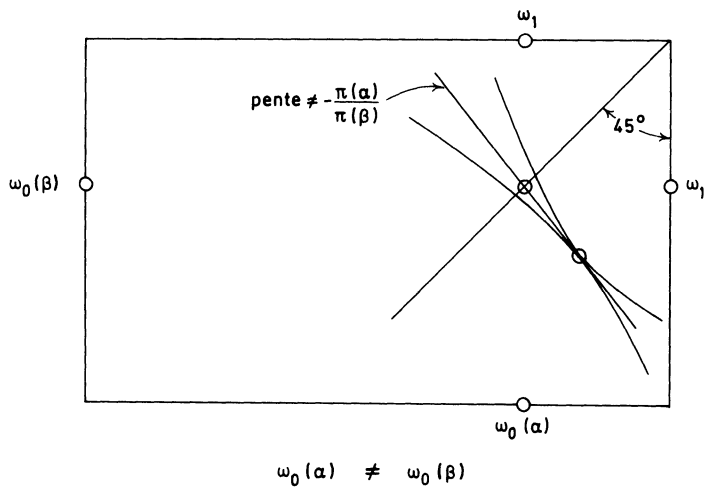


Figure 3.

On peut également étendre la Proposition 1 en vue de l'appliquer à l'incertitude qui n'affecte ni les goûts, ni les dotations agrégées, mais qui affecte en revanche les dotations individuelles. (Le lecteur peut retrouver le raisonnement à l'aide de la figure 1. Il suffit de se donner une allocation hors de la diagonale, puis de montrer que les allocations d'équilibre de concurrence doivent se trouver sur la diagonale). Tel est essentiellement le résultat obtenu par Malinvaud (1972). On peut également se référer à Balasko (1981).

La plupart des économistes ne seront probablement pas très surpris par la Proposition 1. Dans la section suivante, nous montrons que si les tâches solaires n'ont pas d'importance dans l'économie Arrow-Debreu c'est parce qu'elle représente un monde essentiellement *a*-temporel.

3. LES TACHES SOLAIRES PEUVENT REVETIR UNE IMPORTANCE SI LES GENERATIONS SE SUCCEDENT

Comme on l'a souvent remarqué, l'un des caractères les plus attrayants du modèle Arrow-Debreu est sa faculté d'adaptation. On a souvent soutenu, en particulier, que ce cadre général peut tout aussi bien embrasser les aspects intertemporels du processus d'échange que ses aspects atemporels plus évidents. Mais le peut-il ? Nous pensons que, à un égard important tout au moins, il n'a pas cette capacité. Le processus d'échange requiert un contact individuel direct. Même si les individus actuellement en vie peuvent connaitre aujourd'hui les prix qui prévaudront demain dans diverses circonstances, ils n'ont simplement pas la possibilité d'échanger aujourd'hui avec les individus qui ne sont pas encore nés et ne feront leur apparition que demain. Cette section est consacrée à l'analyse des conséquences de cette réalité sans appel. Notre principale conclusion est que, lorsque des considérations temporelles d'ordre naturel limitent l'accès au marché, les taches solaires peuvent fort bien avoir de l'importance.

Nous considérons le modèle à générations successives le plus simple possible ; il ne diffère du modèle présenté dans la Section II que par le fait qu'un seul des consommateurs se trouve en vie avant l'observation de l'activité solaire. C'est ce que traduit la ligne du temps représentée sur la figure 4. Nous supposons que M^r0, le consommateur représentatif

LA LIGNE DUTEMPS DE LA SECTION III:
ACCÈS AU MARCHÉ TEMPORELLEMENT CONTRAINT

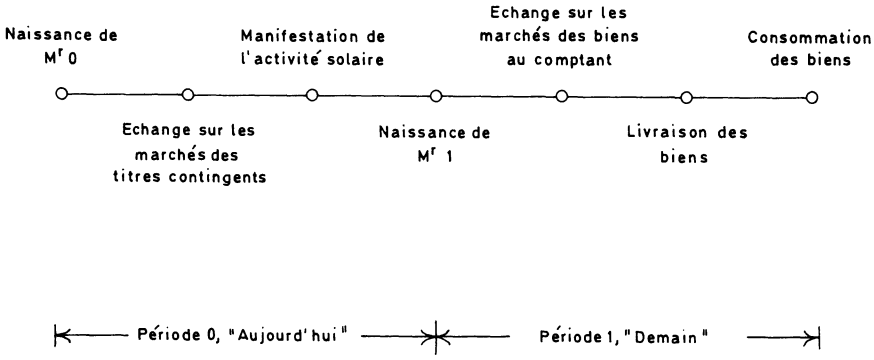


Figure 4.

de la «génération 0», est né au début de la période 0 et qu'il demeure en vie durant les périodes 0 et 1. On observe l'activité solaire au cours de la période 0. $M^r 0$ peut échanger des titres contingents avant cette observation. $M^r 1$, le consommateur représentatif de la «génération 1», ne nait qu'au début de la période 1 et ne se trouve en vie que durant cette période. Le seul marché sur lequel $M^r 1$ puisse échanger est le marché des biens au comptant (non contingents) de demain.

On doit souligner le fait que, dans ce modèle, – comme dans celui de la section précédente – il existe un système complet de marchés de biens contingents et au comptant. Dans l'économie décrite au cours de la Section II cependant, aucune contrainte ne limitait l'accès au marché. L'économie formalisée dans la section présente, en revanche, engendre naturellement le phénomène important d'un *accès au marché temporellement contraint :* on suppose l'existence des marchés des titres contingents d'aujourd'hui, mais $M^r 1$ ne peut y participer. Une participation au marché temporellement limitée est inhérente aux modèles véritablement dynamiques. Les modèles où la participation au marché est illimitée en présence d'une incertitude sont essentiellement *a*-temporels.

D'après la figure 4, on constate que l'état de la nature, présence ou absence de taches solaires, est connu avant que $M^r 1$ ait la possibilité d'échanger. Il ne peut échanger que sur le marché des biens au comptant de la période 1. Soit $p(s)$ le vecteur des prix des biens au comptant qui prévaut si l'état de la nature se révèle durant la période 0. Le comportement de $M^r 1$ est alors décrit de la manière suivante :

Maximisation de $\pi(s)\, u_1(x_1(s))$ (7)

sous les contraintes $p(s)\, x_1(s) \leqq p(s)\, \omega_1$ (7)

et $x_1(s) \geqq 0$

pour $s = \alpha, \beta$.

$M^r 0$ peut échanger sur le marché au comptant avec les membres des générations 0 et 1. Il peut également, en principe, échanger des titres contingents avec les membres de sa propre génération. Considérons le contrat (conclu à la période 0) consistant à livrer une unité de la marchandise i si l'état de la nature s se produit. Supposons que $M^r 0$ achète (ou vende, lorsque le signe est négatif) $\tilde{x}_0^i(s)$ unités de ce contrat au prix de marché unitaire $\tilde{p}_0^i(s)$. Posons, par définition $\tilde{x}_0(s) = (\tilde{x}_0^1(s), \tilde{x}_0^2(s))$ et

(7) Le maximand $\pi_1 u_1(x_1(s))$ est, bien entendu, équivalent au maximand $u_1(x_1(s))$. Mais alors que cette dernière normalisation est compatible avec l'hypothèse de l'utilité espérée (et se trouve ainsi mieux appropriée à la démarche suivie dans le texte), la première normalisation facilite les calculs effectués par la suite.

$\widetilde{p}(s) = (\widetilde{p}^1(s), \widetilde{p}^2(s))$. Ces contrats correspondent aux seuls échanges possibles à la période 0. La première contrainte pesant sur le comportement d'échange de $M^r 0$ est par conséquent

$$\widetilde{p}(\alpha)\,\widetilde{x}_0(\alpha) + \widetilde{p}(\beta)\,\widetilde{x}_0(\beta) \leqq 0. \tag{8}$$

En d'autres termes, à la période 0, $M^r 0$ doit financer ses achats de titres contingents par ses ventes de titres contingents.

$M^r 0$ est également en mesure d'échanger sur le marché des biens au comptant de la période 1 une fois révélé l'état de la nature. Compte tenu de ses possibilités antérieures, ceci signifie que la seconde contrainte qui s'applique au comportement d'échange de $M^r 0$ est

$$\begin{aligned} & p(s)\,x_0(s) \leqq p(s)\,\widetilde{x}_0(s) + p(s)\,\omega_0 \\ \text{et} \qquad & x_0(s) \geqq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

pour $s = \alpha, \beta$. Finalement donc, la description du comportement d'optimisation de $M^r 0$ est :

$$\begin{aligned} & \text{Maximisation de} \quad \pi(\alpha)\,u_0(x_0(\alpha)) + \pi(\beta)\,u_0(x_0(\beta)) \\ & \text{sous les contraintes (8), (9)} \\ & \text{et} \qquad (x_0(\alpha), x_0(\beta)) \geqq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Dans cette économie, un équilibre (avec accès au marché temporellement contraint) est une paire de prix et de quantités allouées de biens au comptant et de titres contingents

$$(\widetilde{p}, p, \widetilde{x}_0, x) = ((\widetilde{p}(\alpha), \widetilde{p}(\beta)), (p(\alpha), p(\beta)), (\widetilde{x}_0(\alpha), \widetilde{x}_0(\beta)), (x_0(\alpha), x_0(\beta), x_1(\alpha), x_1(\beta))$$

telle que (i) *les consommateurs optimisent,* i.e., $(\widetilde{x}_0(\alpha), \widetilde{x}_0(\beta), x_0(\alpha), x_0(\beta))$ est la solution de (10) et $(x_1(\alpha), x_1(\beta))$ est la solution de (7) et (ii) *les marchés sont en équilibre,* i.e.,

$$x_0(s) = 0 \quad \text{et} \quad x_0(s) + x_1(s) = \omega_0 + \omega_1 \tag{11}$$

pour $s = \alpha, \beta$.

Cet équilibre est temporellement contraint parce que $M^r 1$ n'est simplement pas en mesure d'échanger des titres contingents. Ceci signifie, il convient de le remarquer, qu'à l'équilibre $M^r 0$ (qui représente l'ensemble de la génération 0) n'achète ni ne vend de titres contingents (bien qu'en principe il en ait la possibilité). Nous démontrerons plus bas qu'une telle absence d'activité sur le marché des titres contingents, loin de discréditer notre formulation spécifique, introduit simplement une simplification utile, en vérifiant en particulier la possibilité que les taches solaires aient de l'importance.

L'hypothèse des anticipations rationnelles – selon laquelle $M^r 0$ prévoit correctement les prix des biens au comptant de demain, de sorte que ces prix correspondent nécessairement à l'équilibre du marché des biens au comptant de demain – entraine une relation simple entre les prix des titres contingents et les prix des biens au comptant. Le lemme suivant décrit cette relation.

Lemme 1

Dans un équilibre avec accès au marché temporellement contraint, le vecteur des prix des titres contingents $p(s)$ est proportionnel au vecteur des prix des biens au comptant $\tilde{p}(s)$, i.e., il existe un $\lambda(s) > 0$ tel que $\tilde{p}(s) = \lambda(s)\, p(s)$ pour $s = \alpha, \beta$. Qui plus est, on ne perd rien en généralité si on suppose que le vecteur $\tilde{p} = (\tilde{p}(\alpha), \tilde{p}(\beta))$ est égal au vecteur $p = (p(\alpha), p(\beta))$.

Démonstration

Supposons que $(\tilde{p}, p, \tilde{x}_0, x)$ soit un équilibre dans lequel, pour être spécifique, $\tilde{p}^1(\alpha)/\tilde{p}^2(\alpha) < p^1(\alpha)/p^2(\alpha)$. Alors $M^r 0$ essaiera de réaliser un plan – avec, disons, $\tilde{p}(\alpha)\,\tilde{x}_0(\alpha)$ nul mais $\tilde{x}_0^1(\alpha)$, et par conséquent $p(\alpha)\,\tilde{x}_0(\alpha)$, aussi grands que l'on veut – qui permettra à $x_0(\alpha)$ d'être aussi grand que l'on veut. Mais ce comportement est incompatible avec l'équilibre du marché des biens au comptant si l'état de la nature s se produit. On doit ainsi avoir $\tilde{p}^1(\alpha)/\tilde{p}^2(\alpha) > p^1(\alpha)/p^2(\alpha)$ ou, *a fortiori* (puisque la possibilité d'arbitrage spécifique est sans importance du point de vue de l'argumentation), il existe un $\lambda(s) > 0$ tel que $\tilde{p}(s) = \lambda(s)\, p(s)$ pour $s = \alpha, \beta$.

Si on remplace maintenant $p(s)$ par $\lambda(s)\, p(s)$ dans (7) et (10), cela ne modifie pas la solution de ces problèmes car les deux membres des contraintes correspondantes sont multipliés par $\lambda(s)$. Par conséquent, afin de retenir une notation plus commode, nous pouvons nous contenter de poser $\tilde{p} = p$ comme une implication de l'équilibre. □

La possibilité de réaliser des profits par voie d'arbitrage dans un équilibre avec anticipations rationnelles est éliminée par le Lemme 1. Compte tenu de ce résultat, nous pouvons recourir à une description de l'équilibre simplifiée, en l'exprimant à l'aide de la paire de prix et de quantités allouées

$$(p, x) = ((p(\alpha), p(\beta)),\ (x_0(\alpha), x_0(\beta),\ x_1(\alpha), x_1(\beta))$$

(soit la même que dans la Section II). Le lemme suivant formalise cette simplification.

Lemme 2

Un équilibre avec accès au marché temporellement contraint peut être caractérisé de manière alternative comme une paire de prix et de quantités allouées (p, x) telle que, en tenant compte, comme il se doit, des considérations d'ordre naturel liées au temps, (i) *les consommateurs optimisent,* i.e., la consommation de $M^r 0$, disons $x_0 = (x_0(\alpha), x_0(\beta))$, est solution du problème

Maximisation de $\pi(\alpha)\, u_0(x_0(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_0(x_0(\beta))$

sous les contraintes

$$p(\alpha)\, x_0(\alpha) + p(\beta)\, x_0(\beta) \leqq p(\alpha)\, \omega_0 + p(\beta)\, \omega_0 \tag{10'}$$

et

$$(x_0(\alpha), x_0(\beta)) \geqq 0,$$

et tandis que la consommations de $M^r 1$, dison $\chi_1 = (x_1(\alpha), x_1(\beta))$ est solution du problème (7), et (ii) *les marchés sont en équilibre,* i.e.,

$$x_0(s) + x_1(s) = \omega_0 + \omega_1 \tag{11'}$$

pour $s = \alpha, \beta$.

Démonstration (dans le cas de notre modèle spécifique)

En vertu du Lemme 1, nous pouvons supposer que $\tilde{p} = p$. Notre objectif est de démontrer premièrement que, si $(\tilde{p} = p, p, \tilde{x}_0, x)$ est solution de (7), (10) et (11), alors (p, x) est solution de (7), (10′) et (11′) et, deuxièmement, que, si (p, x) est solution de (7), (10′), et (11′), il existe alors un $\tilde{x}_0$ tel que $(\tilde{p} = p, p, \tilde{x}_0, x)$ soit la solution de (7), (10) et (11).

Puisque (11) implique (11′), il nous suffit, pour vérifier la première assertion, de démontrer que si $(\tilde{x}_0, x_0)$ est une solution de (10), alors x_0 est la solution de (10′). Mais ce résultat dérive directement de l'observation du fait que toute solution réalisable de (10′) correspond à une solution réalisable de (10) : plus précisément, si x_0 vérifie la contrainte de budget dans (10′) et si $\tilde{x}_0$ est solution des équations de dépense état par état

$$\tilde{p}(s)\, \tilde{x}_0(s) = p(s)\, (x_0(s) - \omega_0) \tag{12}$$

pour $s = \alpha, \beta$, alors $(\tilde{x}_0, x_0)$ vérifie les contraintes budgétaires (8) et (9).

Un raisonnement à peine plus subtil permet de vérifier la seconde assertion. Puisqu'en vertu de (11) $\tilde{x}_0 = 0$, il nous suffit de démontrer que, étant donné $\tilde{p} = p$, si x est une solution de (7), (10′) et (11′), alors $\tilde{x}_0 = 0$ est une solution de (12) (et par conséquent, conformément au raisonnement précédent, $(\tilde{x}_0 = 0, x_0)$ est une solution de (10)). Mais ce

résultat dérive immédiatement du fait qu'une solution de (7) vérifie $p(s)\,(x_1(s) - \omega_1) = 0$ et qu'une solution de (11′) vérifie $p(s)\,[x_0(s) - \omega_0) + (x_1(s) - \omega_1)] = 0$, de sorte que

$$\tilde{p}(s)\,\tilde{x}_0(s) = p(s)\,(x_0(s) - \omega_0) = p(s)\,(x_1(s) - \omega_1) = 0$$

pour $s = \alpha, \beta$. L'équivalence des deux formulations de l'équilibre est ainsi établie. □

Ce type d'équivalence ne vaut pas seulement pour notre modèle spécifique. Supposons par exemple (en renonçant à entrer dans le détail fastidieux d'une élaboration complétement générale) qu'il existe à la fois plusieurs consommateurs distincts avant la manifestation des taches solaires (nommés génération 0, ou, plus brièvement, G^0) et plusieurs consommateurs distincts, nés après l'observation des taches solaires (nommés génération 1, ou G^1), On généralise l'argument central utilisé dans la démonstration du Lemme 2 en considérant $\tilde{x}_h$ pour $h \in G^0$ tel que

$$\tilde{p}(s)\,\tilde{x}_h = p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) \tag{13}$$

pour $s = \alpha, \beta$. En particulier, nous pouvons spécifier que tous les éléments de chaque $\tilde{x}_h(s)$ sont nuls à l'exception du premier élément, et résoudre ensuite les équations (13) de dépense état par état pour chaque $\tilde{x}_h^1(s)$. Cette approche traduit le fait que les consommateurs de la génération 0 peuvent tout aussi bien effectuer leurs transactions sur un unique marché des titres contingents si ils sont confrontés, lors de la période 1, à un système complet de marchés des biens au comptant. Quoi qu'il en soit, et comme précédemment, l'équation (13) elle-même implique qu'une solution de l'analogue de (10′) fournit une solution de l'analogue de (10). Qui plus est, avec cette construction particulière, le comportement d'optimisation des consommateurs de la génération 1, joint à l'équilibre du marché des biens au comptant, entraine nécessairement l'équilibre du marché des titres contingents, puisque maintenant

$$\sum_{h \in G^0} \tilde{p}(s)\,\tilde{x}_h(s) = \sum_{h \in G^0} p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) = \sum_{h \in G^1} p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) = 0$$

implique

$$\sum_{h \in G^0} \tilde{x}_h(s) = 0.$$

Nous adoptons dans ce qui suit la description simplifiée de l'équilibre temporellement contraint, i.e., nous nous intéressons à la paire (p, x) qui résoud (7), (10′) et (11′). Le fait qu'il existe toujours un équilibre dans lequel les taches solaires n'ont pas d'importance est à tout le moins plausible, même dans le modèle avec accès au marché temporellement contraint. Lorsqu'on utilise le modèle particulier de cette section (décrit désormais

par (7), (10′) et (11′), aucune raison évidente n'empêche M′0 d'avoir des anticipations de prix cohérentes qui le rendraient indifférent à l'activité solaire. On établit facilement en fait l'existence d'un équilibre dans lequel les taches solaires n'ont pas d'importance et ceci constitue un résultat parfaitement général.

Proposition 2

Dans une économie avec accès au marché temporellement contraint (ou non contraint), il existe un équilibre dans lequel les taches solaires n'ont pas d'importance.

Démonstration (dans le cas de notre modèle spécifique)

Dans le cas d'un accès au marché non contraint, le résultat dérive de la Proposition 1 (et de l'existence de l'équilibre de concurrence).

Dans le cas d'un accès au marché temporellement contraint, supposons que les prix soient spécifiquement tels que $p(s) = \pi(s)p$ pour $s = \alpha, \beta$. La concavité stricte entraine immédiatement que (i) si $(x_0(\alpha), x_0(\beta))$ est la solution de (10′) alors $x_0(\alpha) = x_0(\beta) = x_0$ et (ii) si $x_1(s)$ est la solution de (7) pour $s = \alpha, \beta$, alors $x_1(\alpha) = x_1(\beta) = x_1$. Ainsi, trouver une solution de (7), (10′) et (11′) se ramène à trouver une solution du problème

Maximisation de $\quad u_h(x_h)$

sous les contraints $\quad px_h \leqq p\omega_h \qquad (14)$

et $\quad x_h \geqq 0$

pour $h = 1, 1$ et

$$x_0 + x_1 = \omega_1 + \omega_2 \cdot \qquad (15)$$

Mais une solution de (14) et (15) n'est autre qu'un équilibre du modèle d'échange pur le plus simple tel qu'il se présente dans les manuels. Il s'en suit que tout argument d'existence classique (par exemple, Debreu, 1959, Chapitre 5) fournit une solution, et, par conséquent, un équilibre dans lequel les taches solaires n'ont pas d'importance. □

La question la plus intéressante, évidemment, est la question de savoir si il peut également exister un équilibre dans lequel les taches solaires ont une importance. Il se trouve que, *dans le cas de notre modèle spécifique,* nous pouvons complétement caractériser l'ensemble des économies pour lesquelles la réponse est positive. Tel est l'objet de l'observation suivante.

Observation 1

Dans notre modèle spécifique avec accès au marché temporellement contraint, il existe un équilibre où les taches solaires ont de l'importance si et seulement si il existe au moins deux équilibres où elles n'en ont pas.

Démonstration

Nécessité. Supposons qu'il existe un équilibre (p, x) dans lequel les taches solaires ont une importance. Alors $x_h(\alpha) \neq x_h(\beta)$ for $h = 0, 1$. Nous montrerons que chacune des allocations contingentes distinctes $(x_0(s), x_1(s))$ engendre un équilibre sous la forme spécifique

$$(p^s, x^s) = ((\pi(\alpha)\, p(s), \pi(\beta)\, p(s)), (x_0(s), x_0(s), x_1(s), x_1(s)),$$

de sorte qu'il existe au moins deux équilibres dans lesquels les taches solaires n'ont pas d'importance.

Etant donné (p, x), (7), (10′) et (11′) impliquent que

$$p(s)\, x_0(s) = p(s)\, \omega_0$$

pour $s = \alpha, \beta$ et, donc, d'après (10′) que $x_0(s)$ est la solution de

Maximisation de $\quad u_0(x_0)$

sous les contraintes $\quad p(s)\, x_0 \leqq p(s)\, \omega_0 \qquad (16)$

et $\quad x_0 \geqq 0$

pour $s = \alpha, \beta$. Considérons maintenant les prix sous la forme spécifique

$$p^s = (\pi(\alpha)\, p(s), \pi(\beta)\, p(s)). \qquad (17)$$

Il nous faut démontrer que (moyennant un usage un peu abusif de la notation), lorsque p vérifie (17), (i) $(x_0(s), x_0(s))$ est la solution de (10′), (ii) $x_1(s)$ est la solution de (7) et (iii) $(x_0(s), x_1(s))$ est une solution de (11′). Les résultats (ii) et (iii) sont évidents. Et le résultat (i) dérive d'une raisonnement analogue à celui que nous avons utilisé pour démontrer la Proposition 2 : en vertu de la concavité stricte, si $(x_0(\alpha), x_0(\beta))$ est la solution de (10′), alors $x_0(\alpha) = x_0(\beta) = x_0$, et (10′) se réduit à (16). Nous avons ainsi démontré que (p^s, x^s) est un équilibre dans lequel les taches solaires n'ont pas d'importance.

Suffisance. Supposons qu'il existe deux équilibres (p', x') and (p'', x'') dans lesquels les tâches solaires n'ont pas d'importance. Alors $x'_h(\alpha) = x'_h(\beta) = x'_h \neq x''_h = x''_h(\alpha) = x''_h(\beta)$ pour $h = 0, 1$. Nous montrerons qu'une combinaison des prix p' et p'' sous la forme spécifique

$$p = (\pi(\alpha)\, \lambda'(p'(\alpha) + p'(\beta)), \pi(\beta)\, \lambda''(p''(\alpha) + p''(\beta))) \qquad \text{pour} \quad (\lambda', \lambda) > 0 \qquad (18)$$

supporte l'allocation $$x = (x_0', x_0'', x_1', x_1''),$$

de sorte qu'il existe un équilibre dans lequel les taches solaires ont de l'importance.

Soit λ' un multiplicateur (la valeur optimale du multiplicateur de Lagrange-Kuhn-Tucker) associé à la contrainte figurant dans (10′) lorsque $p = p'$ et λ'' un multiplicateur associé à la même contrainte lorsque $p = p''$. Il nous faut démontrer que, lorsque p vérifie (18), (i) (x_0', x_0'') est la solution de (10′), (ii) x_1' est la solution de (7) pour $s = \alpha$, (iii) x_1'' est la solution de (7) pour $s = \beta$ et (iv) (x_0', x_1') et (x_0'', x_1'') sont des solutions de (11′). Le résultat (iv) est évident. Les résultats (ii) et (iii) proviennent simplement du fait que x_1' et x_1'' sont les solutions de (7) pour $s = \alpha$ et $s = \beta$, lorsque $p = p'$ et $p = p''$ respectivement. Mais le résultat (i) requiert un peu plus d'attention.

Remarquons pour commencer que (10′) se réduit à

Maximisation de $$u_0(x_0)$$

sous les contraintes

$$(p'(\alpha) + p'(\beta))\, x_0 \leqq (p'(\alpha) + p'(\beta))\, \omega_0 \tag{19}$$

et $$x_0 \geqq 0$$

lorsque $p = p'$ et à

Maximisation $$u_0(x_0)$$

sous les contraintes

$$(p''(\alpha) + p''(\beta))\, x_0 \leqq (p''(\alpha) + p''(\beta))\, \omega_0 \tag{20}$$

et $$x_0 \geqq 0$$

lorsque $p = p''$. Ainsi d'une part, (10′) est associée au Lagrangien

$$L'(x_0, x_1, \lambda) = u_0(x_0) + \lambda(p'(\alpha) + p'(\beta))\,(\omega_0 - x_0) \tag{21}$$

lorsque $p = p'$ et

$$L''(x_0, x_1, \lambda) = u_0(x_0) + \lambda(p''(\alpha) + p''(\beta))\,(\omega_0 - x_0) \tag{22}$$

lorsque $p = p''$. D'autre part, lorsque p vérifie (18), (10′) est associée au Lagrangien

$$\begin{aligned} L(x_0(\alpha), x_0(\beta), \mu) = {} & \pi(\alpha)\, u_0(x_0(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_0(x_0(\beta)) + \mu\,[\pi(\alpha)\,\lambda'(p'(\alpha) + \\ & + p'(\beta))\,(\omega_0 - x_0(\alpha)) + \pi(\beta)\,\lambda''(p''(\alpha) + \\ & + p''(\beta))\,(\omega_0 - x_0(\beta))] = \pi(\alpha)\,[u_0(x_0(\alpha)) + \\ & + \mu\lambda'(p'(\alpha) + p'(\beta))\,(\omega_0 - x_0(\alpha))] + \\ & + \pi(\beta)\,[u_0(x_0(\beta)) + \mu\lambda''(p''(\alpha) + p''(\beta))(\omega_0 - x_0(\beta))]. \end{aligned} \tag{23}$$

Nous avons maintenant recours au Théorème de Kuhn-Tucker relatif à la programmation concave (voir par exemple Uzawa (1958)). Par hypothèse x_0' est une solution de (19), de sorte que, par hypothèse $(x_0' \lambda')$ est un point selle de (21). De la même façon, (x_0'', λ'') est un point selle de (22). Un calcul simple montre alors que $(x_0', x_0'', 1)$ est nécessairement un point selle de (23). Il s'en suit que, lorsque p vérifie (18), (x_0', x_0'') doit être une solution de (10') : nous avons ainsi démontré que (p, x) est un équilibre dans lequel les taches solaires ont de l'importance. □

L'Observation 1 met en relation l'existence d'un équilibre dans lequel les taches solaires ont de l'importance avec le nombre des équilibres dans lesquels elles n'en ont pas. L'Observation 1 est tout à fait propre au modèle spécifique présenté ici ; elle n'est guère susceptible d'être généralisée de manière significative. Elle joue dans notre analyse le rôle d'étape dans la démonstration de l'existence de situations économiques, caractérisées par une information parfaite et des croyances communes à tous, dans lesquelles les taches solaires ont une importance.

On pourrait être induit en erreur par l'Observation 1. Dans le modèle spécifique utilisé dans cette section, les équilibres avec taches solaires sont essentiellement choisis au hasard à partir des (deux) équilibres sans taches solaires. Un exemple fourni dans le second appendice montre que ce n'est en aucun cas le seul type d'équilibre avec taches solaires possible. Il importe d'observer que, dans les modèles d'économies monétaires avec anticipations rationnelles, nous sommes typiquement confrontés à une vaste multiplicité d'équilibres dans lesquels les taches solaires n'ont pas d'importance (cf., par exemple, Cass et Shell (1980) et Balasko et Shell (1981)). Il reste encore à examiner de manière systématique la question de savoir si semblable multiplicité a ou non des implications du point de vue de l'existence des équilibres dans lesquels les taches solaires ont une importance effective.

Nous concluons cette section par notre principal résultat concernant la possibilité des équilibres dans lesquels les taches solaires ont de l'importance.

Proposition 3

Dans l'économie avec anticipations rationnelles et accès au marché temporellement contraint, il peut exister des équilibres dans lesquels les taches solaires ont de l'importance.

Démonstration

Elle se déduit de l'Observation 1 et de la possibilité bien connue d'une non-unicité des équilibres Arrow-Debreu simples. □

4. TACHES SOLAIRES ET BIEN-ETRE

Le présent examen est mené à l'aide des modèles spécifiques présentés dans la Section II (accès au marché non contraint) et dans la Section III (accès au marché contraint). Ses résultats principaux sont néammoins parfaitement généraux.

Une allocation $x = (x_0, x_1) = (x_0(\alpha), x_0(\beta), x_1(\alpha), x_1(\beta))$ est dite *optimale au sens de Pareto traditionnel* si il n'existe aucune autre allocation $y = (y_0, y_1) = (y_0(\alpha), y_0(\beta), y_1(\alpha), y_1(\beta))$ possédant les propriétés

(i) $v_h(y_h) \geqq v_h(x_h)$ pour $h = 0, 1$, avec au moins une inégalité stricte

et

(ii) $\sum_h x_h \geqq \sum_h y_h$.

Des allocations d'équilibre avec accès au marché non contraint sont évidemment optimales au sens de Pareto traditionnel, et des allocations optimales au sens de Pareto traditionnel sont des allocations d'équilibre avec accès au marché non contraint pour un ensemble convenablement choisi de dotations.

Cependant, aucun de ces deux théorèmes de bien-être ne s'applique directement aux économies avec accès au marché temporellement contraint. Ceci s'explique par le fait que M^r 1 ne peut modifier l'allocation des ressources qu'après la manifestation des taches solaires. Il intervient *ou bien* en tant que $M^r(1, \alpha)$ *ou bien* en tant que $M^r(1, \beta)$. Aucun agent n'est présent sur les marchés temporellement contraints pour répondre en tant que partenaire aux besoins ex-ante des deux faces potentielles du personnage de M^r 1.

On peut donner un sens plus faible à l'optimalité Paretienne (que nous baptisons «optimalité Paretienne dynamique»), mieux adapté à l'analyse des économies dans lesquelles l'accès au marché est temporellement contraint.

Une allocation $x = (x_0, x_1) = (x_0(\alpha), x_0(\beta), x_1(\alpha), x_1(\beta))$ est dite *dynamiquement optimale au sens de Pareto* si il n'existe aucune autre allocation $y = (y_0, y_1) = (y_0(\alpha), y_0(\beta), y_1(\alpha), y_1(\beta))$ ayant les propriétés

(i) $v_0(y_0) \geqq v_0(x_0), u_1(y_1(\alpha)) \geqq u_1(x_1(\alpha))$, et

$u_1(y_1(\beta)) \geqq u_1(x_1(\beta))$, avec au moins une inégalité stricte

et

(ii) $\sum_h x_h > \sum y_h$.

Une allocation d'équilibre avec accès au marché temporellement contraint est dynamiquement optimale au sens de Pareto. Chaque allocation dynamiquement optimale au sens de Pareto est une allocation d'équilibre avec accès au marché temporellement contraint pour un ensemble convenablement choisi de dotations (attribuées à $M^r\,0$, $M^r\,(1, \alpha)$ *et* $M^r\,(1, \beta)$).

Ces deux critères naturels de bien-être requièrent un commentaire plus approfondi :

Dans l'économie non contrainte, toute allocation optimale au sens de Pareto (traditionnel) peut-être réalisée sous notre condition initiale en vertu de laquelle les dotations (ou, de manière équivalente, les systèmes d'imposition et de subvention applicables à des dotations données) sont indépendantes des taches solaires, et ce pour la même raison, à savoir que les taches solaires n'ont jamais d'importance. Dans l'économie temporellement contrainte cependant, on ne pourra généralement pas compter sur une telle flexibilité ; semblable condition additionnelle pesant sur les dotations (et par conséquent sur les systèmes d'imposition et de subvention) limite également la possibilité de traiter $M^r\,(1, \alpha)$ et $M^r\,(1, \beta)$ comme deux individus essentiellement distincts.

L'optimalité Parétienne au sens traditionnel implique l'optimalité Parétienne dynamique, mais l'inverse n'est pas vrai. En fait le premier concept suppose d'assigner des poids relatifs au bien-être de $M^r\,(1, \alpha)$ et de $M^r\,(1, \beta)$ selon la probabilité relative d'une naissance dans l'état α ou dans l'état β. Cette procédure peut s'avérer, ou pas, socialement désirable (8). Si on la juge telle, cependant, elle permet de justifier avec force une intervention gouvernementale délibérée visant à compenser les effets des taches solaires.

La figure 5 illustre le contraste entre les deux concepts d'optimalité. L'utilité de $M^r\,0$ est, naturellement, $v_0 = \pi(\alpha)\, u_0(x_0(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_0(x_0(\beta))$. L'utilité de $M^r\,(1, \alpha)$ est définie par $u_{1,\alpha} = u_1(x_1(\alpha))$ et, de la même façon, celle de $M^r\,(1, \beta)$ par $u_{1,\beta} = u_1(x_1(\beta))$. La surface à deux dimensions dans l'espace $(v_0, u_{1,\alpha}, u_{1,\beta})$ correspond à l'ensemble des allocations dynamiquement optimales au sens de Pareto. Ces allocations sont optimales au sens de Pareto traditionnel si, et seulement si, $u_{1,\alpha} = u_{1,\beta}$. Dans la figure 5, v_0 est fixé au niveau $\bar{v}_0$. La courbe en pointillé est le lieu des paires maximales $(u_{1,\alpha}, u_{1,\beta})$ compatibles avec $\bar{v}_0$. L'allocation correspondant à l'intersection de la courbe en pointillé et du rayon $u_{1,\alpha} = u_{1,\beta}$ est optimale au sens de Pareto traditionnel.

---

(8) Nous ne pensons pas qu'elle le soit, si on se fonde du moins sur des motifs *à priori*, et tout particulièrement dans le cas d'une incertitude intrinsèque (ou contenant à la fois des éléments intrinsèques et extrinsèques). Pour une présentation de certains aspects relatifs à cette question dans le contexte d'un modèle particulier à générations successives, voir Muench (1977).

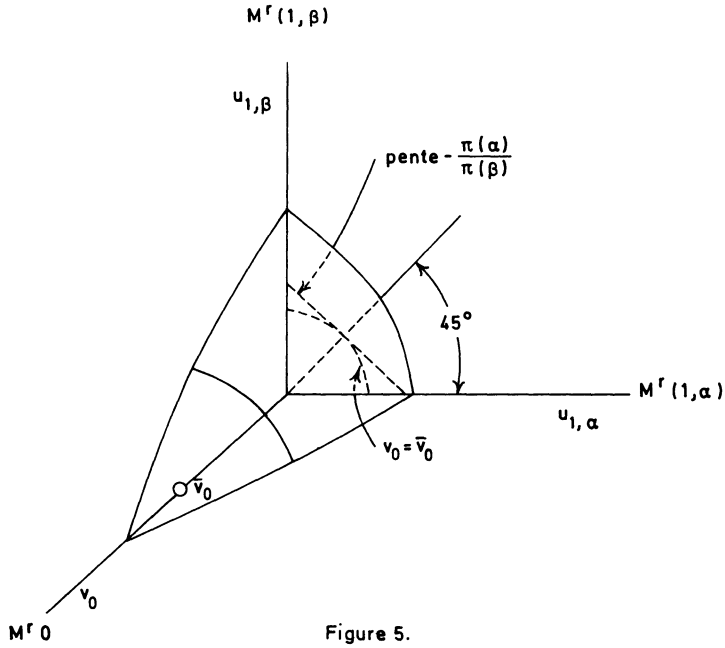


Figure 5.

PREMIER APPENDICE

Afin de faire ressortir les caractéristiques les plus importantes que présente la formulation générale de notre exemple directeur, nous considérons pour commencer un modèle prototype dans lequel le temps ne joue aucun rôle particulier. Nous développons ensuite cette version essentiellement *a*-temporelle en vue d'y intégrer les notions fondamentales que constituent, premièrement, les contraintes temporelles d'information (l'une des principales contributions conceptuelles du Chapitre 7 de Debreu) et, deuxièmement, les contraintes temporelles d'accès au marché. Nous donnons, pour terminer, aux démonstrations des Propositions 1 et 2 l'extension requise dans ce modèle relativement vaste d'échange pur à travers le temps.

Les principaux éléments de notre modèle prototype restent sensiblement les mêmes, à ceci près qu'il existe maintenant en général un grand nombre de périodes, $t = 0, 1, \ldots, n$, de marchandises $i = 1, 2, \ldots, \ell$, d'états $s \in S$ (avec $\# S < \infty$), et de consommateurs, $h = 1, 2, \ldots, m$.

C'est intentionnellement que nous avons retenu une notation abstraite pour représenter l'incertitude ; le fait que l'état du monde constitue

une description complète de la réalisation de toute l'incertitude pertinente, pour l'ensemble des périodes à venir, est mis en relief par cette notation. Ainsi, par exemple, s peut éventuellement décrire l'évolution de l'activité solaire, de sorte que

$$S = \{(\sigma^1, \ldots, \sigma^t, \ldots, \sigma^n) : \sigma^t \in \{\alpha, \beta\} \quad \text{pour} \quad t = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Quelle qu'en soit d'ailleurs l'interprétation, le consommateur h perçoit l'état s comme une variable aléatoire à laquelle est associée une distribution de probabilités, le cas échéant subjective,

$$\{\pi_h(s)\} \quad \text{avec} \quad \pi_h(s) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad s \in S \quad \text{et} \quad \sum_{s \in S} \pi_h(s) = 1.$$

Notons $x_h^{t,i}(s)$ la consommation de la marchandise i par l'agent h, au cours de la période t, dans l'état s,

$$x_h^t(s) = (x_h^{t,1}(s), \ldots, x_h^{t,i}(s), \ldots, x_h^{t,\ell}(s))$$

et

$$x_h(s) = (x_h^1(s), \ldots, x_h^t(s), \ldots, x_h^n(s)).$$

Comme précédemment, les préférences du consommateur h portent sur sa consommation prospective $\{x_h(s)\}$ et sont représentées par une fonction d'utilité $v_h : \underset{s \in S}{\mathrm{X}} \mathbf{R}_+^{n\ell} \to \mathbf{R}$, que nous nous bornons maintenant à supposer continue, quasi-concave et dépourvue de maxima locaux. L'agent h dispose également d'une dotation de marchandises prospectives que nous nous contentons maintenant de supposer non-triviale.

Afin de généraliser notre précédente caractérisation de la nature de l'activité solaire, nous supposons que l'incertitude est *extrinsèque* :

(i) les opinions relatives aux probabilités sont communes à tous,

$$\pi_h(s) = \pi(s) > 0 \quad \text{pour} \quad s \in S \tag{A1}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$;

(ii) les fonctions d'utilité satisfons l'hypothèse de l'utilité espérée,

$$v_h(\{x_h(s)\}) = \sum_{s \in S} \pi(s)\, u_h(x_h(s)) \tag{A2}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$; et,

(iii) les dotations de marchandises sont indépendantes de l'état du monde,

$$\omega_h(s) = \omega_h \quad \text{pour} \quad s \in S \tag{A3}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$.

Ils s'en suit que u_h est continue, concave et ne comporte pas de maximum global. (Voir Yaari (1977) pour une justification de l'aversion pour le risque dans ce contexte).

Enfin, et afin de fermer le modèle, soit $p^{t,i}(s)$ le prix de la marchandise i, durant la période t, dans l'état s,

$$p^t(s) = (p^{t,1}(s), \ldots, p^{t,i}(s), \ldots, p^{t,\ell}(s))$$

et
$$p(s) = (p^1(s), \ldots, p^t(s), \ldots, p^n(s)).$$

Un équilibre est une paire de prix et de quantités allouées de marchandises contingentes

$$(p, x) = (\{p(s)\}, (\{x_1(s)\}, \ldots, \{x_h(s)\}, \ldots, \{x_m(s)\})) \qquad \text{(A4)}$$

telle que $\{x_h(s)\}$ soit solution du problème

Maximisation de $\displaystyle\sum_{s \in S} \pi(s)\, u_h(x_h(s))$

sous les contraintes $\displaystyle\sum_{s \in S} p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) \leqq 0$ (A5)

et $s_h(s) \geqq 0$ pour $s \in S$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$, et

$$\sum_{h=1}^{m} (x_h^{t,i}(s) - \omega_h^{t,i}) < 0, \text{ avec une égalité stricte lorsque } p^{t,i}(s) > 0 \qquad \text{(A6)}$$

pour $t = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots,$; $s \in S$.

Jusqu'ici, le temps n'est intervenu que dans la mesure où la date de disponibilité d'une marchandise se trouvait distinguée à titre de caractéristique particulière de cette marchandise. Nous passons maintenant à la modélisation de deux vérités sans appel à savoir que, d'une part, la réalisation de l'incertitude se produit naturellement au cours du temps, et que, d'autre part, la population des consommateurs varie naturellement à travers le temps.

Considérons premièrement le fait que l'incertitude se résoud dans le temps. Les consommateurs sont, dans le meilleur des cas, informés mais non pas omniscients. En conséquence, au cours d'une période donnée, tout ce que l'on peut raisonnablement supposer connu par un consommateur en ce qui concerne l'état du monde sont les évènements qui se sont d'ores et déjà produits. Suivant Debreu, on formalise cette limitation en spécifiant qu'une information complète durant la période t signifie la connaissance du fait que l'état s appartient à un sous-ensemble d'états s^t, qui appartient à son tour à une partition de l'espace des états S^t. Cette représentation ne s'accorde avec la signification qu'on lui prête qu'à condition de supposer que $S^0 = S$, S^t est une partition plus fine que S^{t-1} pour $t = 1, 2, \ldots, n$ et $S^n = \{S\}$ – c'est-à-dire qu'on ne dispose initiale-

ment d'aucune information, puis les niveaux d'information acquis augmentent avec le passage du temps, pour aboutir finalement à une information complète.

Quelles implications ce développement présente-t-il pour la description du fonctionnement du marché ? Et bien simplement le fait que si l'état s' ne se distingue pas de l'état s'' au cours de la période t, alors la marchandise (t, i) dans l'état s' ne se distingue pas de la marchandise (t, i) dans l'état s''. La principale conséquence réelle est donc la nécessité d'ajouter au programme (A5) des contraintes d'information imposant l'identité de la consommation en présence d'états indistincts.

$$x_h^t(s') = x_h^t(s'') = x_h^t(s^t) \quad \text{pour} \quad s', s'' \in s^t \in \mathrm{S}^t \; ; \; t = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(A7)}$$

De plus, outre le rajout de (A7), tout ce qui compte à des fins d'analyse ou d'interprétation sont les prix composites correspondants

$$p^t(s^t) = \sum_{s \in \mathrm{S}^t} p^t(s)$$

pour $s^t \in \mathrm{S}^t$; $1 = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi, par exemple, nous pourrions nous borner à supposer que les prix composants sous-jacents prennent la forme commode suivante

$$p^t(s) = \frac{\pi(s)}{\sum_{s' \in s^t} \pi(s')} p^t(s^t) \quad \text{pour} \quad s \in s^t$$

pour $s^t \in \mathrm{S}^t$; $t = 1, 2, \ldots, n$. Semblable structure ne jouera cependant aucun rôle dans l'exposé qui suit.

De la description des aspects temporels de l'incertitude, nous passons maintenant à la description des aspects temporels de la démographie. Les consommateurs naissent, vivent et meurent. Par conséquent, un consommateur donné n'est concerné que par un (petit) sous-ensemble de marchandises contingentes (et par les marchés correspondants) à savoir, essentiellement, les marchandises contingentes (et les marchés correspondants) qui peuvent se trouver disponibles au cours de sa durée de vie. On formalise cette restriction sans difficulté.

Supposons qu'un consommateur ait une *date de naissance* b_h (sa première période de vie) et une *date de décès* d_h (sa dernière période de vie), de sorte que

$$0 \leqq b_h \leqq d_n \leqq n$$

On peut tenir compte de ces dates elles-mêmes en introduisant simplement des contraintes d'inactivité à la fois dans la spécification des dotations (A2) et dans la description du comportement (A5) – en redéfinis-

sant en fait l'ensemble de consommation – avec pour conséquence en particulier que

$$x_h^t(s) = 0 \quad \text{pour} \quad t \neq b_h,\ b_{h+1}, \ldots, d_h,\ s \in \mathrm{S}. \tag{A8}$$

Etant donné cependant que l'incertitude antérieure sera d'ores et déjà résolue au moment de sa naissance, on doit également identifier le consommateur h au moyen d'une statistique de vie plus subtile, à savoir un *état de naissance* $s^{b_h} \in \mathrm{S}^{b_h}$. Mais ceci signifie qu'une description exacte de son activité sur le marché requiert l'introduction de contraintes additionnelles d'inactivité pour représenter *chacun* de ses états de naissance possibles. En d'autres termes, le problème unique (A5) se décompose en plusieurs problèmes embrassant *la totalité* des évènements prénataux concevables,

Maximisation de $\displaystyle\sum_{s \in \mathrm{S}^{b_h}} \pi(s)\, u_h(x_h(s))$ (9)

sous les contraintes

$$\sum_{s \in s^{b_h}} p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) \leqq 0 \qquad (\mathrm{A5}^{s^{b_h}})$$

et $$x_h(s) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad s \in s^{b_h}$$

pour $s^{b_h} \in \mathrm{S}^{b_h}$; $h = 1, 2, \ldots, m$. Il est utile (bien qu'un peu inexact) de concevoir le problème ($\mathrm{A5}^{s^{b_h}}$) comme le problème (A5) joint aux contraintes d'inactivité

$$x_h(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s \notin s^{b_h}. \tag{A9}$$

Cette interprétation accentue le parallèle entre les deux contraintes (A8) et (A9) qui restreignent naturellement l'accès au marché.

La distinction faite dans le texte entre un monde Arrow-Debreu avec accès au marché illimité et un monde où cet accès est temporellement contraint correspond précisément à la distinction entre le comportement d'échange décrit par (A5) et (A7) et le comportement décrit par ($\mathrm{A5}^{s^{b_h}}$) joint à (A7) et (A8). Pour abréger, nous nous réfèrerons respectivement à un équilibre dans le premier modèle comme *non-contraint* et dans le second comme *temporellement contraint.*

Avant d'en venir enfin aux démonstrations des Propositions 1 and 2, il nous faut disposer d'une construction supplémentaire nous permettant de fixer l'idée que l'incertitude extrinsèque introduit (resp. n'introduit pas) une différence réelle. Admettons spécifiquement qu'un équi-

(9) Ceci est équivalent aux maximand

$$\sum_{s \in s^{b_h}} (\pi(s) \Big/ \sum_{s' \in s^{b_h}} \pi(s'))\, u_h(x_h(s)).$$

libre *avec certitude* soit une paire de prix et de quantités allouées de marchandises non contingentes

$$(p, x) = ((p^1, \ldots, p^t, \ldots, p^n), (x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_m))$$

telle que x_h soit une solution de

Maximisation de $\quad u_h(x_h)$

sous les contraintes $\quad p(x_h - \omega_h) \leqq 0 \qquad$ (A10)

et $\quad x_h \geqq 0$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$, et

$$\sum_{h=1}^{m} (x_h^{t,i} - \omega_h^i) < 0, \text{ avec une égalité stricte lorsque } p^{t,i} > 0 \qquad \text{(A11)}$$

pour $t = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Etant donné un équilibre non contraint particulier (p, x), nous dirons donc que l'incertitude extrinsèque *a de l'importance* (resp. *n'en a pas*) si il n'existe pas (resp. si il existe) d'équilibre avec certitude tel que

$$\sum_{s \in S} \pi(s)\, u_h(x_h(s)) = u_h(x_h). \qquad \text{(A12)}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$. De la même façon, étant donné un équilibre temporellement contraint particulier, nous dirons que l'incertitude extrinsèque a de l'importance (resp. n'en a pas) si il n'existe pas (resp. si il existe) un équilibre avec certitude (p, x) tel que

$$\sum_{s \in s^{b_h}} (\pi(s) \Big/ \sum_{s' \in s^{b_h}} \pi(s'))\, u_h(x_h(s)) = u_h(x_h) \qquad (\text{A12}^{s^{b_h}})$$

pour $s^{b_h} \in S^{b_h}$; $h = 1, 2, \ldots, m$.

Nous caractérisons donc les situations où l'incertitude extrinsèque a de l'importance comme les situations dans lesquelles l'existence de marchés de biens contingents induit une «différence réelle» en termes de bien-être individuel. Dans le cas de l'équilibre temporellement contraint, la question critique est «le bien-être individuel de qui ?» Comme on l'a indiqué dans le texte, nous avons résolu cette question d'une manière qui semble à la fois évidente et naturelle : un consommateur h donné caractérisé par l'état de naissance $s^{b_h'}$ est simplement un individu différent du même consommateur h caractérisé par l'état de naissance $s^{b_h''} \neq s^{b_h'}$.

Etant donné nos hypothèses et notre terminologie présentes, il n'est nécessaire de réexposer les deux résultats fondamentaux du texte que de manière accessoire. Voir Balasko (1981) pour une généralisation dépassant le cadre von Neumann-Morgenstern.

Proposition A1

Il n'existe pas d'équilibre non contraint dans lequel l'incertitude extrinsèque ait de l'importance.

Proposition A2

Si il existe un équilibre avec certitude, alors il existe à la fois des équilibres non contraint et temporellement contraint dans lesquels l'incertitude extrinsèque n'a pas d'importance.

Remarque

L'hypothèse de la proposition A2 revient à supposer que la répartition des dotations satisfait l'une des conditions classiques de l'existence de l'équilibre dans l'économie avec certitude caractérisée par (u_h, ω_h) pour $h = 1, 2, \ldots, m$, par exemple, l'irréductibilité ou l'interconnection des ressources.

Démonstration de A1

Supposons que (p, x) soit un équilibre non contraint et définissons

$$p = \sum_{s \in S} p(s),$$

$$x_h = \sum_{s \in S} \pi(s)\, x_h(s)$$

et $$\bar{x}_h(s) = x_h \quad \text{pour} \quad s \in S$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$. Nous montrerons que les prix p supportent également l'allocation

$$\bar{x} = (\{\bar{x}_1(s)\}, \ldots, \{\bar{x}_h(s)\}, \ldots, \{\bar{x}_m(s)\}),$$

ce qui signifie que $(p, \bar{x})$ est également un équilibre non contraint. Il en résulte directement que (p, x) est un équilibre avec certitude satisfaisant (A12).

D'une part, par hypothèse,

$$\{x_h(s)\} \text{ est une solution de (A5) et (A7)} \tag{A13}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$, et en raison de la concavité (et en dernière instance en raison de (A1) et (A2))

$$\sum_{s \in S} \pi(s)\, u_h(x_h(s)) = u_h(x_h) = u_h\left[\sum_{s \in S} \pi(s)\, x_h(s)\right] \geqq \sum_{s \in S} \pi(s)\, u_h(x_h(s))$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$. En conséquence, en reprenant la raisonnement classique de la préférence révélée, ou bien

$$\{\bar{x}_h(s)\} \text{ est une solution de A5 et A7} \tag{A14}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$ et donc

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{s \in S} p(s)\,(\bar{x}_h(s) - \omega_h) = 0, \tag{A15}$$

ou bien

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{s \in S} p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) > 0. \tag{A16}$$

D'autre part, (p, x) est par hypothèse une solution de (A6) de sorte qu'en prenant la moyenne (et en dernière instance en raison de (A3))

$$\sum_{h=1}^{m} (x_h^{t,i}(s) - \omega_h^{t,i}) = \sum_{h=1}^{m} \Big(\sum_{s \in S} \pi(s)\, x_h^{t,i}(s) - \omega_h^{t,i} \Big) =$$

$$= \sum_{s \in S} \pi(s) \sum_{h=1}^{m} (x_h^{t,i}(s) - \omega_h^{t,i}) < 0 \tag{A17}$$

pour $t = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, \ell$. D'où, en faisant le calcul d'évaluation classique,

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{s \in S} p(s)\,(\bar{x}_h(s) - \omega_h) < 0. \tag{A18}$$

Mais (A16) et (A18) sont contradictoires, tandis que (A14) et par conséquent (A15) et (A17) sont compatibles si et seulement si

$$\sum_{h=1}^{m} (\bar{x}_h^{t,i}(s) - \omega_h^{t,i}) \leqq 0, \quad \text{avec une égalité stricte lorsque } p^{t,i}(s) > 0 \tag{A19}$$

pour $t = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, \ell$. (A14) joint à (A19) vérifient le fait que $(p, \bar{x})$ est un équilibre atemporel.

Finalement, pour en déduire que (x, p) est un équilibre avec certitude satisfaisant (A12), il suffit d'observer que (A16) implique (A10), que (A19) implique (A11) et que (A13) joint à (A14) impliquent (A12). □

Démonstration de A2

Supposons que (p, x) soit un équilibre avec certitude et posons par définition

$$p(s) = \pi(s)\, p \tag{A20}$$

pour $s \in S$ et

$$x_h(s) = x_h \quad \text{pour} \quad s \in S \tag{A21}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, m$. Nous montrerons que (p, x) est à la fois un équilibre non contraint et temporellement contraint. Etant donné la construction des allocations (A21), il s'en suit donc immédiatement que l'incertitude extrinsèque n'a pas d'importance.

Attachons-nous pour commencer à l'équilibre non contraint. Il nous faut montrer que (i) $\{x_h(s)\}$ est une solution de (A5) et (A7) et (ii) que (p, x) est une solution de (A6). Le résultat (ii) est évident, puisque l'hypothèse selon laquelle (p, x) est une solution de (A11) l'implique directement. Et le résultat (i) est presque aussi immédiat puisqu'il dérive directement à la fois de l'hypothèse selon laquelle x_h est une solution de (A10) et du résultat facile à vérifier (étant donné la construction des prix (A20) suivante : en raison de la concavité, si $\{x_h(s)\}$ est une solution de (A5) et (A7), alors :

$$\bar{x}_h(s) = \sum_{s' \in S} \pi(s')\, x_h(s') \quad \text{pour} \quad s \in S \tag{A22}$$

est également une solution de (A5) et (A7) (nous pouvons donc nous borner à considérer les solutions qui revêtent la structure spécifique des allocations (A21)).

En ce qui concerne l'équilibre temporellement contraint, le raisonnement est identique à condition de remplacer «(A5) et (A7)» par «($A5^{s^{bh}}$) joint à (A7) et (A8)» et (A22) par

$$\bar{x}_h(s) = \sum_{s' \in s} \left(\pi(s') \Big/ \sum_{s'' \in s^{bh}} \pi(s'')\right) x_h(s') \quad \text{pour} \quad s \in S^{bh}. \tag{$A22^{s^{bh}}$}$$

(Les calculs sont cependant encore plus laborieux). □

SECOND APPENDICE

Cet appendice a pour objet de fournir un exemple d'équilibre dans lequel les taches solaires ont de l'importance, mais qui ne se ramène pas essentiellement à une loterie entre des équilibres dans lesquels les taches solaires n'ont pas d'importance. Considérons le modèle spécifique constituant la pièce centrale de la Section III. Afin d'éviter les propriétés particulières liées à cet exemple, supposons pour le cas présent qu'il y ait deux consommateurs nés à la période 0, disons, $h \in G^0 = \{0', 0''\}$, et un consommateur né à la période 1, disons, $h \in G^1 = \{1\}$. Le comportement d'optimisation des consommateurs et l'équilibre du marché sont donc décrits de la manière suivante :

Maximisation de $\quad \pi(\alpha)\, u_h(x_h(\alpha)) + \pi(\beta)\, u_h(x_h(\beta))$

sous les contraintes

$$p(\alpha)\, x_h(\alpha) + p(\beta)\, x_h(\beta) \leqq p(\alpha)\, \omega_h + p(\beta)\, \omega_h \tag{A1}$$

et

$$(x_h(\alpha), x_h(\beta)) \geqq 0$$

pour $h \in G^0$;

Maximisation de $\quad u_h(x_h(s))$

sous les contraintes

$$p(s)\, x_h \leqq p(s)\, \omega_h \tag{A2}$$

et

$$x_h(s) \geqq 0$$

pour $h \in G^1$; $s = \alpha, \beta$; et

$$\sum_{h \in G^0 \cup G^1} x_h(s) = \sum_{h \in G^0 \cup G^1} \omega_h \tag{A3}$$

pour $s = \alpha, \beta$.

Avec le maintien des hypothèses faites sur les préférences et les dotations, il reste vrai que, étant donné un équilibre particulier (p, x), les taches solaires ont de l'importance si, et seulement si, $x_h(\alpha) \neq x_h(\beta)$ pour un quelconque $h \in G^0$. En outre, si u_h est différentiable pour un quelconque $h \in G^0$, alors un tel équilibre *ne* sera *pas* réductible à une combinaison d'équilibres dans lesquels les taches solaires sont sans importance à condition que

$$p(s)\, (x_h(s) - \omega_h) \neq 0 \quad \text{pour un quelconque} \quad h \in G^0 \; ; \; s = \alpha, \beta. \tag{A4}$$

On peut considérer ce résultat de la manière suivante : supposons, au contraire, que (p', x') soit un équilibre ayant la propriété que (par souci de spécificité) $x'_h(s) = x_h(\alpha)$ pour $h \in G^0$; $s = \alpha, \beta$. La différentiabilité de u_h pour un certain $h \in G^0$ implique alors la colinéarité de $p'(\alpha)$, $p'(\beta)$ et $p(\alpha)$ (au vecteur $\partial u_h(x_h(\alpha))/\partial x_h$ pour le consommateur en question). Mais (A4) implique donc que, étant donné $p = p'$, la résolution du problème (A2) ne se réduit pas à la résolution du problème

Maximisation de $\quad u_h(x_h)$

sous les contraintes

$$(p'(\alpha) + p'(\beta))\, x_h \leqq (p'(\alpha) + p'(\beta))\, \omega_h$$

et

$$x_h \geqq 0,$$

pour $h \in G^0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Notre tache consiste ainsi simplement à construire des opinions, des préférences et des dotations qui satisfassent non seulement les hypothèses conservées, mais également l'hypothèse additionnelle de différen-

tiabilité des fonctions d'utilité, et qui fournissent en outre une solution de (A1), (A2) et (A3) ayant pour propriétés : (i) $x_h(\alpha) \neq x_h(\beta)$ pour un quelconque $h \in G^0$ et (ii) $p(s)\,(x_h(s) - \omega_h) \neq 0$ pour une quelconque $h \in G^0$; $s = \alpha, \beta$. On peut réaliser une telle construction en formant une paire de prix et de quantités allouées qui possède assez de degrés de liberté pour permettre de spécifier les opinions et les préférences comme il convient.

1) Soit $\omega_h = (1,1)$ pour $h \in G^0$ et $\omega_h = (2,2)$ pour $h \in G^1$.

2) On choisit $p = ((p^1(\alpha), 1), (p^1(\beta), 1))$ tel que $1 > p^1(\alpha) > p^1(\beta) > 0$.

3) On choisit $\epsilon > 0$ de sorte que

$$\begin{cases} (p^1(\alpha), 1)\,(x^1, x^2) = (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) - \epsilon \\ (p^1(\beta), 1)\,(x^1, x^2) = (p^1(\beta), 1)\,(1,1) + \epsilon \end{cases}$$

ait une solution positive $(x^1, x^2) > 0$ $[\Rightarrow x^2 > 1 > x^1]$.

4) On choisit $x_{0'} = x' = (x'(\alpha), x'(\beta))$ tel que

$$\begin{cases} (p^1(\alpha), 1)\,x'(\alpha) = (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) - \epsilon \\ (p^1(\beta), 1)\,x'(\beta) = (p^1(\beta), 1)\,(1,1) + \epsilon \end{cases}$$

$$[\Rightarrow (p^1(\alpha), 1)\,x'(\alpha) + (p^1(\beta), 1)\,x'(\beta) = \\ = (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) + (p^1(\beta), 1)\,(1,1)]$$

et

$$x'(\alpha) > x'(\beta) > 0\ [\Rightarrow x^{2'}(\beta) > 1 > x^{1'}(\alpha)]\ ;$$

on choisit $x_{0''} = x'' = (x''(\alpha), x''(\beta))$ tel que

$$\begin{cases} (p^1(\alpha), 1)\,x''(\alpha) = (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) + \epsilon \\ (p^1(\beta), 1)\,x''(\beta) = (p^1(\beta), 1)\,(1,1) - \epsilon \end{cases}$$

$$[\Rightarrow (p^1(\alpha), 1)\,x''(\alpha) + (p^1(\beta), 1)\,x''(\beta) = \\ = (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) + (p^1(\beta), 1)\,(1,1)],$$

$$x''(\alpha) > x''(\beta) > 0$$

et

$$x^{2'}(\beta) > x^{2''}(\beta) > 1 > x^{1''}(\alpha) > x^{1'}(\alpha)\ ;$$

et on choisit $x_1 = x = (x(\alpha), x(\beta))$ de sorte que

$$x(s) = 2 - (x'(s) - 1) - (x''(s) - 1) \quad \text{pour} \quad s = \alpha, \beta$$

$$[\Rightarrow x(\beta) > x(\alpha) > 0$$

et
$$\begin{cases} (p^1(\alpha), 1)\, x(\alpha) = (p^1(\alpha), 1)\,(2{,}2) \\ (p^1(\beta), 1)\, x(\beta) = (p^1(\beta), 1)\,(2{,}2)]. \end{cases}$$

Une telle paire de prix et de quantités allouées (et ses caractères principaux) est représentée dans la figure 6. Il est évident que cette spécification implique l'équilibre du marché (A3). Il ne reste à démontrer que, moyennant un choix approprié de $\pi(s)$ et u_h, l'optimisation des consommateurs (A1) et (A2) est également vérifiée.

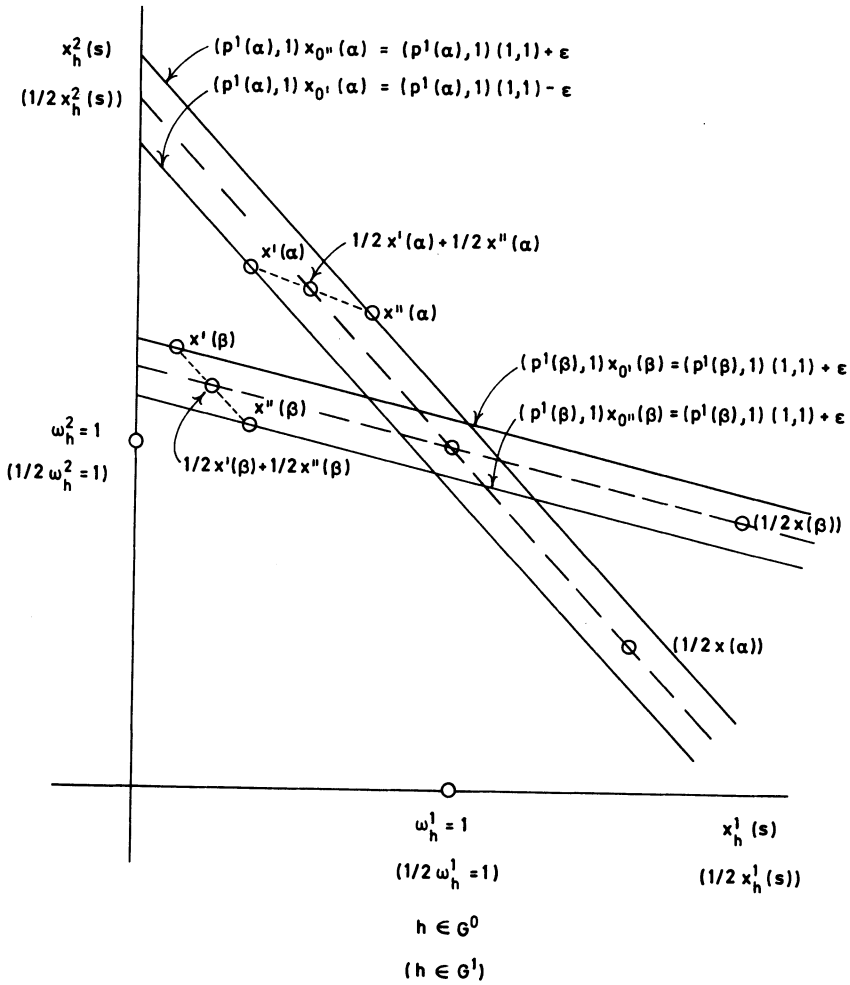


Figure 6.

5) On choisit $0 < \pi(\alpha) < 1$ de façon à ce que

$$(\pi(\beta)/\pi(\alpha))\, p^1(\alpha) < p^1(\beta) \; [\Rightarrow \pi(\beta)/\pi(\alpha) < 1].$$

6) On considère u_h tel que

$$u_h(x^1, x^2) = v_h(x^1) + w_h(x^2)$$

et v_h, w_h : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ soient différentiables, strictement croissantes et strictement concaves. Etant donné que le mode de spécification de ces fonctions particulières obéit essentiellement à la même logique pour les trois consommateurs, nous nous bornerons à en expliciter la procédure dans le cas de $M^r\,0$ (et nous nous dispenserons par conséquent de le repérer par son indice).

L'application directe du Théorème de Kuhn-Tucker (et une simplification non moins directe) entraine que x' est solution du problème :

Maximisation de

$$\pi(\alpha)\,[v(x^1(\alpha)) + w(x^2(\alpha))] + \pi(\beta)\,[v(x^1(\beta)) + w(x^2(\beta))]$$

sous les contraintes

$$(p^1(\alpha), 1)\, x(\alpha) + (p^1(\beta), 1)\, x(\beta) < (p^1(\alpha), 1)\,(1,1) + (p^1(\beta), 1)\,(1,1)$$

et

$$(x(\alpha), x(\beta)) \geqq 0$$

si et seulement si x' vérifie les conditions

$$v'(x^{1'}(\alpha))/w'(x^{2'}(\alpha)) = p^1(\alpha)$$

$$v'(x^{1'}(\beta))/w'(x^{2'}(\beta)) = p^1(\beta)$$

$$w'(x^{2'}(\alpha))/w'(x^{2'}(\beta)) = \pi(\beta)/\pi(\alpha).$$

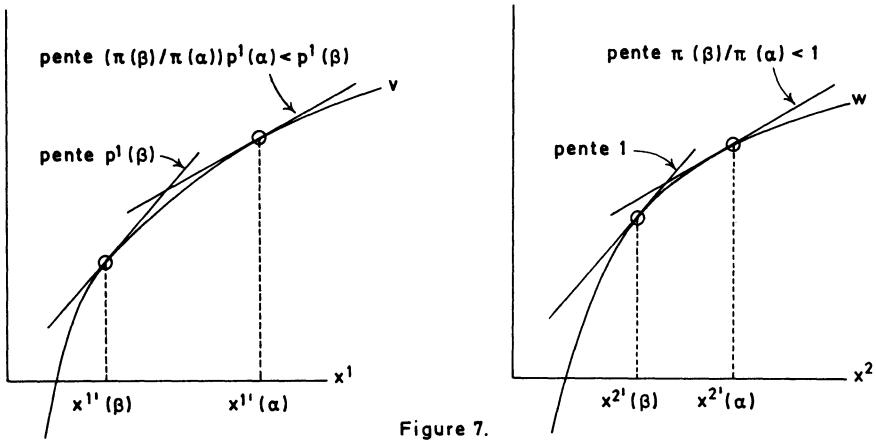


Figure 7.

Mais, comme $x'(\alpha) > x'(\beta)$, ces conditions seront satisfaites si nous choisissons v, w tels que

$$v'(x^{1'}(\beta)) = p^1(\beta) \quad \text{et} \quad v'(x^{1'}(\alpha)) = (\pi(\beta)/\pi(\alpha))\, p^1(\alpha) < p^1(\beta)$$

et $$w'(x^{2'}(\beta)) = 1 \quad \text{et} \quad w'(x^{2'}(\alpha)) = \pi(\beta)/\pi(\alpha) < 1.$$

De telles fonctions sont représentées sur la figure 7.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AZARIADIS C. – «Self-fulfilling Prophecies». *J. Econ. Theory,* à paraitre.

BALASKO Y. – «Extrinsinc Uncertainty Revisited». Caress Working Paper #81-02, Février 1981.

BALASKO Y. and SHELL K. – «The Overlapping-Generations Model, II : The Case of Pure Exchange with Money». *J. Econ. Theory, 24,* 112-142, 1981.

CASS D. and SHELL K. – «In Defense of a Basic Approach». Dans *Models of Monetary Economies,* édité par J. Kareken et N. Wallace : Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1980, pp. 251-260.

DEBREU G. – *Theory of Value.* Wiley : New York, 1959.

MALINVAUD E. – «The Allocation of Risks in Large Markets». *J. Econ. Theory, 4,* 312-328, 1972.

MUENCH T. J. – «Optimality, the Interaction of Spot and Futures Markets, and the Nonneutrality of Money in the Lucas Model». *J. Econ. Theory, 15,* 325-344, 1977.

SHELL K. – «Monnaie et Allocation Intertemporelle». CNRS Séminaire d'Econométrie de M. Edmond Malinvaud, 21 novembre 1977.

UZAWA H. – «The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming». Dans *Studies in Linear and Nonlinear Programming,* édité par K.J. Arrow, L. Hurwicz et H. Uzawa : Stanford University Press, pp. 32-37, 1958.

YAARI M. E. – «A Note on Separability and Quasiconcavity» *Econometrica, 45,* 1183-1186, 1977.